III. *Specimina quædam illustria Doctrinæ* Fluxionum *sive exempla quibus Methodi istius Usus & præstantia in solvendis Problematis Geometricis elucidatur, ex Epistola Peritissimi Mathematici D.* Ab. de Moivre *desumpta.*

HAbes insuper Methodum quam pollicitus eram de Figurarum Curvilinearum Quadraturis; de Solidorum à rotatione plani genitorum eorumque Superficierum dimensione; de rectificatione Curvarum, deque Centri Gravitatis Calculo. Ea à multis doctissimis viris tractata fuisse scio ——— non ideo hoc meum qualecunque tentamen tibi displiciturum existimavi, si modo mihi contigerit ad hæc viam expeditiorem quam quæ vulgo nota est reperisse.

Verum priusquam ulterius progrediar hoc te monitum velim me usurpare illa quæ demonstravit Clarissimus *Newtonus* in *pag.* 251, 252 & 253 *Princ. Phil.* circa momentanea incrementa vel decrementa quantitatum quæ fluxu continuo crescunt vel decrescunt, præsertim quod dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum sit $\frac{n}{m} a A^{\frac{n}{m}-1}$.

Porro data fluxione $\frac{n}{m} a A^{\frac{n}{m}-1}$ vicissim reperiri potest quantitas fluens $A^{\frac{n}{m}}$, 1° tollendo a de fluxione, 2° fluxionis Indicem unitate augendo, 3° denique fluxionem dividendo per Indicem sic unitate auctum.

Curvæ abscissa designabitur deinceps per x, ejus fluxio per $\dot{x}$, ordinatim applicata per y, ejusque fluxio per $\dot{y}$

His positis ut ad quadraturas deveniamus, 1° assumatur valor ordinatim applicatæ ope æquationis naturam Curvæ exprimentis. 2° Multiplicetur hic valor per fluxionem abscissæ; Rectangulum hinc ortum erit fluxio areæ. 3° Datâ fluxione Areæ reperiatur quantitas fluens, habebitur Area quæsita.

Proponatur æquatio $x^m = y^n$ cujusvis Paraboloidos naturam exprimens, valor ordinatim applicatæ y est $x^{\frac{m}{n}}$ qui si multipli-

multiplicetur per x, rectangulum $x^{\frac{m}{n}}\dot{x}$ erit fluxio Areæ, proindeque Area quæsita erit $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m}{n}+1}$, seu (posito y pro $x^{\frac{m}{n}}$) $\frac{n}{m+n}xy$.

Rursum proponatur Curva cujus æquatio sit, $x^4+aaxx=yy$ (illa scilicet quæ inter exempla Cl. *Craigi* extat prima) assumpto $x\sqrt{xx+aa}=y$, fluxio Areæ erit $x\dot{x}\sqrt{xx+aa}$; Cum autem sub Radicalitate involvatur, supponatur $\sqrt{xx+aa}=z$, hinc $xx+aa=z^2$, ideoque $x\dot{x}=z\dot{z}$; positisque $z\dot{z}$ & z pro $x\dot{x}$ & $\sqrt{xx+aa}$, fluxio à Surdis liberata erit $z^2\dot{z}$, quam si ad originem suam $\frac{1}{3}z^3$ revocaverimus, repositoque $\sqrt{xx+aa}$ pro z, habebitur $\frac{1}{3}\overline{xx+aa}\sqrt{xx+aa}$ pro Area quæsita.

Sed quo magis constet quam facili negotio conficiantur hujusmodi quadraturæ, unum amplius exemplum proferre visum est; æquatio Curvæ talis sit $\frac{x^2}{x+a}=y^2$, igitur $y=\frac{x}{\sqrt{x+a}}$ ideoque $\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x+a}}$ est fluxio Areæ: supponatur $\sqrt{x+a}=z$, hinc $x=zz-a$, & $\dot{x}=2z\dot{z}$, Itaque $\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x+a}}=2z^2\dot{z}-2a\dot{z}$, ac proinde $\frac{2}{3}z^3-2az$ seu $\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}a\sqrt{x+a}$ erit Area quæsita.

Verum sæpe accidit ut quædam Curvæ, quales Circulus & Hyperbola, ejus naturæ sint, ut frustra tentaveris earum fluxiones Surdis immunes facere; tunc valore ordinatæ in seriem infinitam conjecto, singulisque hujus seriei terminis per fluxionem abscissæ, ut supra, multiplicatis, reperiatur singulorum terminorum quantitas fluens, orietur nova series quæ quadraturam Curvæ exhibebit.

Methodus hæc eadem facilitate ad dimensionem Solidorum à plani circumvolutione genitorum accomodatur, nempe assumendo pro eorum fluxione productum ex fluxione abscissæ per circulum basis; Ratio quadrati ad circulum sibi inscriptum vocetur $\frac{n}{1}$, æquatio circulo competens est $yy=dx-xx$,

igitur $4\frac{\overline{dx\dot{x} - x^2\dot{x}}}{n}$ est fluxio portionis Sphæræ, igitur $4\frac{\overline{\frac{1}{2}dxx - \frac{1}{3}x^3}}{n}$ est portio ipsa, huic circumscriptus cylindrus est $4\frac{\overline{dxx - x^3}}{n}$, ideoque ratio portionis Sphæræ ad circumscriptum cylindrum est ut $\frac{1}{2}d - \frac{1}{3}x$ ad $d - x$.

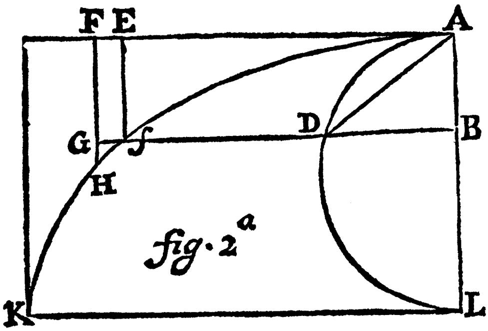
Rectificatio curvarum obtinebitur, si Hypothenusa Trianguli rectanguli cujus latera sunt fluxiones abscissæ & ordinatæ, tanquam Curvæ fluxio consideretur, sed curandum est ut, in expressione istius hypothenusæ, alterutra fluxionum solummodo supersit, ac una tantum indeterminatarum, illa scilicet cujus fluxio retinetur. Res Exemplis clarior fiet.

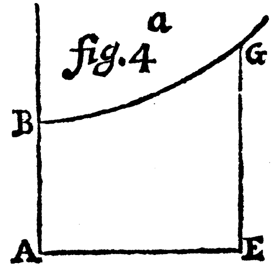
Ex dato sinu recto C B arcum A C invenire, positis A B $= x$, C B $= y$, O A $= r$; sit C E fluxio abscissæ, E D fluxio ordinatim applicatæ, C D fluxio arcus C A; Ex Circuli proprietate $2rx - xx = yy$, unde $2r\dot{x} - 2x\dot{x} = 2y\dot{y}$, ideoque

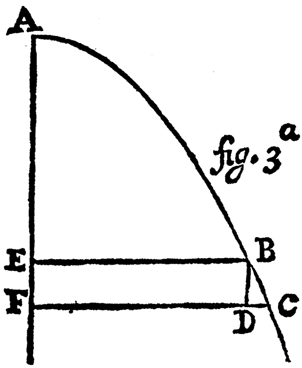
Fig. prima. $\dot{x} = \frac{y\dot{y}}{r - x}$, sed C D $q = \dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \dot{y}\dot{y} + \frac{y^2\dot{y}\dot{y}}{rr - 2rx + xx}$ $= \dot{y}\dot{y} + \frac{y^2\dot{y}\dot{y}}{rr - yy} = \frac{rr\dot{y}\dot{y}}{rr - yy}$ igitur C D $= \frac{r\dot{y}}{\sqrt{rr - yy}}$, sed $\frac{r\dot{y}}{\sqrt{rr - yy}}$ factum est ex $\frac{1}{\sqrt{rr - yy}}$ seu $\overline{rr - yy}|^{-\frac{1}{2}}$ in $r\dot{y}$ proindeque si $\overline{rr - yy}|^{-\frac{1}{2}}$ conjiciatur in seriem infinitam cujus singula membra per $r\dot{y}$ multiplicentur, & ex unoquoque producto ad quantitatem fluentem fiat retrogressus, habebitur longitudo arcus A C.

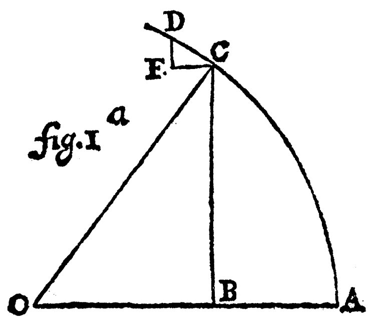
Non absimili modo ex dato sinu verso reperietur idem arcus; Resumatur æquatio supra inventa $2r\dot{x} - 2x\dot{x} = 2y\dot{y}$, fit $\dot{y} = \frac{r\dot{x} - x\dot{x}}{2y}$, sed C D $q = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} =$ $\dot{x}\dot{x} + \frac{rr\dot{x}\dot{x} - 2rx\dot{x}\dot{x} + x^2\dot{x}\dot{x}}{yy} = \dot{x}\dot{x} + \frac{rr\dot{x}\dot{x} - 2rx\dot{x}\dot{x} + x^2\dot{x}\dot{x}}{2rx - xx}$ seu (omnibus sub eodem denominatore reductis, expunctisque iis quæ sub diversis signis continentur) $= \frac{rr\dot{x}\dot{x}}{2rx - xx}$ unde C D $= \frac{r\dot{x}}{\sqrt{2rx - xx}}$, ideoque longitudo arcus A C per ea quæ jam dicta sunt facile obtinebitur.

Fluxio









See Page 54.

Fluxio curvæ facilius interdum reperitur per comparationem inter Triangula similia CED, CBO, institui enim potest hæc proportio, CB, CO :: CE, CD, hoc est, pro circulo, $\sqrt{2rx - xx}$, r :: $\dot{x}$, $\frac{r\dot{x}}{\sqrt{2rx - xx}}$.

Curva Cycloidis eadem opera cognosci poterit. Sit ALK semicycloïs cujus circulus genitor ADL. Assumpto in diametro AL quovis puncto B, ducatur Bj parallela basi LK, peripheriæ circuli in puncto D occurrens; compleatur rectangulum AEjB ducaturque FH rectæ Ej parallela, eidemque infinite vicina, Bj productam secans in G, curvamque AK in H; ponatur AL $= d$, AB $=$ Ej $= x$, GH $= \dot{x}$; Notum est rectam BG esse ubique aggregatum arcus AD & sinus recti BD, hinc manifestum est fluxionem jG esse aggregatum fluxionum arcus AD & sinus recti BD. Porro fluxio arcus AD reperta est $= \frac{\frac{1}{2}d\dot{x}}{\sqrt{dx - xx}}$, fluxio autem sinus recti BD re- Fig. secunda.
perietur $= \frac{d\dot{x} - 2x\dot{x}}{2\sqrt{dx - xx}}$, igitur jG $= \frac{d\dot{x} - x\dot{x}}{\sqrt{dx - xx}}$, ideoque jH$q$ = jGq + GHq $= \frac{dd\dot{x}\dot{x} - dx\dot{x}\dot{x}}{dx - xx}$, Quamobrem jH $= \frac{\dot{x}\sqrt{dd - dx}}{\sqrt{dx - xx}} = \frac{\dot{x}\sqrt{d}}{\sqrt{x}} = d^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\dot{x}$, proindeque Aj $= 2d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ $= 2\sqrt{dx} = 2$ AD.

Hæc conclusio minimo cum labore deduci potest ex nota proprietate Tangentis, cum enim illius portiuncula jH semper sit parallela chordæ AD, fit ut Triangula jGH, ABD sint similia, unde AB, AD :: GH, jH, hoc est x, $\sqrt{dx}$ :: $\dot{x}$, $\frac{\dot{x}\sqrt{dx}}{x}$, igitur jH $= \frac{\dot{x}\sqrt{dx}}{x} = d^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\dot{x}$

Sed nihil vetat quominus adhibito fluxionis jH auxilio, ipsam Cycloidis aream investigemus. Fluxio Areæ AEj est rectangulum EjG $= \frac{dx\dot{x} - x^2\dot{x}}{\sqrt{dx - xx}} = \dot{x}\sqrt{dx - xx}$, sed fluxio portionis ABD non alia est ab illa: Itaque Area AEj, correspondensque circuli portio ABD semper sunt æquales.

Esto AB curva Parabolæ cujus Axis AF, parameter a; Fig. ter
ponatur AE $= x$, EB $= y$, AB z, BD $= \dot{x}$, DC $= \dot{y}$, BC $= \dot{z}$, assumptâ æquatione Parabolæ naturam constituente,

videlicet $a x = y y$, fit $a \dot{x} = 2 y \dot{y}$, unde $\dot{x} = \frac{2 y \dot{y}}{a}$, sed BCq = BDq + CDq, hoc est $\ddot{z}\ddot{z} = \ddot{x}\ddot{x} + \ddot{y}\ddot{y} = \frac{4 y^2 \ddot{y}\ddot{y}}{aa} + \ddot{y}\ddot{y} = \frac{4 y^2 \ddot{y}\ddot{y} + aa\ddot{y}\ddot{y}}{aa}$, ideoq; $\dot{z} = \dot{y} \frac{\sqrt{4 y^2 + aa}}{a}$ vel, quod idem est, $\dot{z} = \dot{y} \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4} aa}}{\frac{1}{2} a}$: si ergo $\dot{y} \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4} aa}}{\frac{1}{2} a}$ in seriem infinitam tranformetur, Curva A B haud difficulter innotescet.

Insuper, statim apparet, dato Hyperbolico spatio curvam hanc dari, & vicissim. Nam $\frac{1}{2} a \dot{z} = \dot{y} \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} aa}$, ac proinde $\frac{1}{2} a z$ = spatio cujus fluxio est $\dot{y} \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} aa}$, sed hujusmodi spatium nihil aliud est quam hyperbola æquilatera exterior A B E G, cujus semiaxis A B $= \frac{1}{2} a$, abscissa A E $= y$, ordinatim applicata E G $= x$. Fig. quarta

Ad dimetiendam superficiem conversione curvæ circa suum Axem descriptam, assumi debet pro ejus fluxione Cylindrica superficies cujus altitudo est ipsa curvæ fluxio, cujusque distantia ab Axe est ordinatim applicata huic fluxioni conveniens.

Sit Ex. gr. A C circuli arcus qui circa Axem A D revolvendo superficiem Sphæricam generet, quamque dimetiri statuamus; D C arcus fluxio jam reperta est $\frac{r \dot{x}}{\sqrt{2 r x - x x}}$ hanc si multiplicemus per circumferentiam ad radium B C pertinentem, hoc est per $\frac{c}{r} \sqrt{2 r x - x x}$ (posita ratione circumferentiæ ad radium $= \frac{c}{r}$) habebimus fluxionem superficiei Sphæricæ $= c \dot{x}$; adeoque superficies ipsa est $c x$. Fig. prima.

Ad centra gravitatis quod attinet, repertâ superficiei solidive fluxione, hacque ducta in suam à Vertice distantiam, ad quantitatem fluentem recurrendum est: qua divisa per Superficiem ipsam Solidumve ipsum, prodibit distantia centri Gravitatis à Vertice.

Inveniendum

Inveniendum sit centrum gravitatis omnium Paraboloidum horum fluxio sic generaliter exprimitur $x^{\frac{m}{n}}\dot{x}$, hanc multiplica per x, fit $x^{\frac{m}{n}+1}\dot{x}$ cujus quantitatem fluentem $\frac{n}{m+2n}x^{\frac{m}{n}+2}$ divide per Paraboloidos aream puta $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m}{n}+1}$; prodibit $\frac{m+n}{m+2n}x$, distantia centri gravitatis à Vertice.

Centrum gravitatis in portione Sphæræ eodem modo colligitur, namque illius fluxione $4\frac{\overline{dx\dot{x}-x^2\dot{x}}}{n}$ in x ductâ fit $4\frac{\overline{dx^2\dot{x}-x^3\dot{x}}}{n}$, cujus quantitas fluens $4\frac{\overline{\frac{1}{3}dx^3-\frac{1}{4}x^4}}{n}$ per Portionis soliditatem divisa, puta $4\frac{\overline{\frac{1}{2}dxx-\frac{1}{3}x^3}}{n}$ exhibet $\frac{\frac{1}{3}d-\frac{1}{4}x}{\frac{1}{2}d-\frac{1}{3}x}x$, seu $\frac{4d-3x}{6d-4x}x$ distantiam centri gravitatis à Vertice.

Non statutum habui omnes difficultates quibus calculus iste obnoxius est hic prosequi, mihi sufficiat ad majora viam aperuisse, Tu interim, Vir Clarissime, Vale & me ama.